УДК 519.718

А. В. Рыбаков

МЕТОД СИНТЕЗА НАДЕЖНЫХ КЛЕТОЧНЫХ СХЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИИ ВЫБОРА[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Один из важнейших разделов математической кибернетики – теория синтеза, надежности и сложности управляющих систем. Хорошо известны такие модели вычисления дискретных функций, как схемы из функциональных элементов. Эти схемы как из абсолютно надежных, так и ненадежных элементов изучаются давно, для них получено большое число результатов. Однако в реальных схемах приходится учитывать не только функционирование элементов, но и геометрию схемы. В связи с этим была предложена модель клеточных схем из функциональных элементов, где схема представляется в виде прямоугольника, разделенного на клетки, в которых располагаются элементы схемы, имеющие определенные размеры и занимающие некоторую площадь. Клеточные элементы могут быть как функциональными, т.е. реализующими какую-то функцию от своих входов, так и коммутационными, которые служат для передачи сигнала к следующему элементу с возможным изменением направления. В работе предполагается, что коммутационные элементы абсолютно надежны, а на любом из двух выходов каждого из функциональных элементов с одной и той же вероятностью независимым образом появляются инверсные неисправности. Ранее предлагался метод построения асимптотических оптимальных по надежности клеточных схем, основанный на разложении функции по переменной. Однако схемы, построенные таким образом, обладают слишком высокой сложностью. Цель этой статьи – существенно улучшить оценку сложности для асимптотически оптимальных по надежности клеточных схем.

Материалы и методы. Для построения асимптотически оптимальных по надежности клеточных схем используются клеточные схемы, реализующие функции выбора. Показано, как при помощи таких схем реализовать любую булеву функцию от n переменных, а также оценена ненадежность и сложность предлагаемых схем, причем сложность существенно меньше по сравнению с ранее известной.

Результаты. Предложен метод синтеза асимптотически оптимальных по надежности клеточных схем с улучшенной сложностью. Получена оценка ненадежности предлагаемых схем. Доказаны теоремы о сложности предлагаемых схем.

Вывод. Известная оценка сложности для асимптотически оптимальных по надежности клеточных схем была существенно улучшена.

Ключевые слова: клеточные схемы, функциональные и коммутационные элементы, синтез и сложность надежных клеточных схем.

A. V. Rybakov

METHOD OF RELIABLE CELLULAR CIRCUIT SYNTHESIS USING THE CHOICE FUNCTION

Abstract.

Background. One of the most important fileds of mathematical cybernetics is the theory of synthesis, reliability and complexity of control systems. Such models of

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект 14-01-00273.

discrete functions computing as circuits made of functional gates are well known. These circuits, made of both absolutely reliable and unreliable gates, have been studied for a long time; there have been obtained multiple results. However, in real circuits it is necessary to take into account not just functioning of gates, but a circuit's geometry as well. In this connection there has been suggested a model of cellular circuits made of functional gates, where the circuit is represented as a rectangle, divided into cells, containing circuit's gates, having certain sizes and occupying a certain area. Cellular gates may be both functional, i.e. performing some function from their inputs, and switching ones, that transmit a signal to the next gate with a possible change of direction. The work presupposes that switching gates are absolutely reliable, and at any of two outputs of each functional gate at the same probability independently there occur inverse failures. Previously, there was suggested the method of building asymptotic reliability-optimal cellular circuits, based on expansion of a function by a variable. However, the circuits, built in such manner, are too complicated. The aim of the article is to signidicantly improve complexity estimation for asymptotically reliability-optimal cellular circuits.

Materials and methods. In order to build asymptotically reliability-optimal cellular circuits the author used cellular circuits realizing the choice functions. The article shows how to realize any Boolean function from n variables using such circuits, as well as estimates reliability and complexity of the suggested circuits, having a significantly lower complexity compared to the previously known.

Results. The author suggested the method of synthesis of asymptotically reliability-optimal cellular circuits with improved complexity. The researcher estimated reliability of the suggested circuits and proved the theorems of complexity thereof.

Conclusions. The known complexity estimation for asymptotically reliability-optimal cellular circuits has been significantly improved.

Key words: cellular circuits, functional and switching gates, synthesis and complexity of reliable cellular circuits.

Впервые задачу синтеза надежных схем, реализующих булевы функции и состоящих из ненадежных функциональных элементов (ФЭ), рассматривал Дж. фон Нейман [1]. Он предполагал, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0;\ 1/2)$) подвержены инверсным неисправностям на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию φ, а в неисправном – функцию $\overline{\varphi}$. С помощью итерационного метода Дж. фон Нейман установил, что в произвольном полном базисе при $\varepsilon \in (0;\ 1/6]$ любую булеву функцию можно реализовать схемой, вероятность ошибки на выходе которой при любом входном наборе значений переменных не превосходит $c_1\varepsilon$ (c_1 – некоторая константа, зависящая от базиса). Затем надежные схемы с инверсными неисправностями на выходах элементов исследовались в работах С. И. Ортюкова [2], Д. Улига [3] и некоторых других авторов, причем главное внимание уделялось сложности этих схем.

Асимптотически оптимальные по надежности схемы, реализующие булевы функции, в базисе $\{x \,\&\, y, x \vee y, \overline{x}\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов построены А. В. Васиным [4], а в работе М. А. Алехиной и С. И. Аксенова [5] доказано, что сложность таких схем превышает сложность схем, построенных из абсолютно надежных элементов, асимптотически не более чем в 3 раза.

Насколько известно автору, в работе С. С. Кравцова [6] был впервые предложен класс клеточных схем (еще их называют плоскими схемами). В работе [7] получены оценки сложности КС в предположении, что все элементы схемы (и функциональные (рис. 1,***а***,***б***,***в***), и коммутационные (рис. 1,***г***,***д***,***е***)) абсолютно надежны, а в [8] рассматривалась задача построения клеточных схем из надежных коммутационных и ненадежных функциональных элементов и оценивалась ненадежность и сложность предложенных схем.

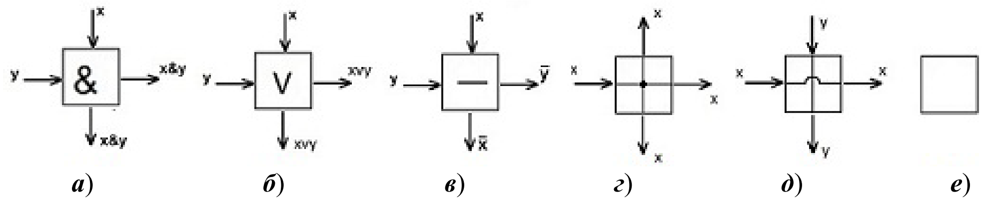

Рис. 1. Базисные элементы

В данной работе, также как и в [8], рассматривается реализация булевых функций клеточными схемами из надежных коммутационных элементов и ненадежных функциональных элементов, но предложен другой метод синтеза надежных схем (с использованием функций выбора) и получены более точные верхние оценки сложности схем. Предложенный метод по сути тот же, что и в [9], но применен к плоским схемам.

Как и в [6], предполагается, что базис содержит два типа элементов: функциональные (рис. 1,***а***,***б***,***в***) и коммутационные (рис. 1,***г***,***д***,***е***). Каждый из этих элементов может быть повернут на плоскости на угол $\frac{k\pi}{2}(k=0,1,2,3)$.

Предполагается, что коммутационные элементы абсолютно надежны, а на любом из двух выходов каждого из функциональных элементов с вероятностью ε (ε∈(0; 1/2)) независимым образом появляются инверсные неисправности.

Считаем, что КС, содержащая ненадежные элементы, реализует булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ ($\tilde{x}^n=(x_1,...,x_n)$), если она реализует $f(\tilde{x}^n)$ при отсутствии неисправностей.

Пусть КС *S* реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Обозначим через $P_{\overline{f(\tilde{a}^n)}}(S,\tilde{a}^n)$ вероятность появлениия ошибки на входном наборе $\tilde{a}^n$ схемы *S*. *Ненадежность* *P*(*S*) клеточной схемы *S* определяется как максимальная вероятность ошибки на выходе схемы при всевозможных входных наборах схемы (т.е. так же, как и для схемы из функциональных элементов). *Надежность* схемы *S* равна $1-P(S)$.

Пусть $P_\varepsilon(f)=\inf\limits_S P(S)$, где инфимум берется по всем схемам *S*, реализующим функцию *f*. Клеточная схема A, реализующая функцию *f*, называется *асимптотически оптимальной по надежности*, если $P(A)\sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon\to 0$.

Пусть длина клеточной схемы S равна $l(S)$, а высота – $h(S)$. Тогда *сложность* $L(S)$ клеточной схемы S определяется как $L(S)=l(S)h(S)$ и равна числу элементов в схеме S.

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1 [9]. Если схема S разбивается на подсхемы $S_1, S_2, ..., S_k$, в совокупности содержащие все элементы схемы S, то

$$P(S) \le \sum_{i=1}^{k} P(S_i).$$

Лемма 2. Любую функцию от одной переменной можно реализовать клеточной схемой, ненадежность которой не больше 2ε.

Доказательство. Схемы, реализующие все функции одной переменной, изображены на рис. 2. Поскольку каждая из них содержит не более двух функциональных элементов, вероятность ошибки на выходе каждой из приведенных схем не больше 2ε.

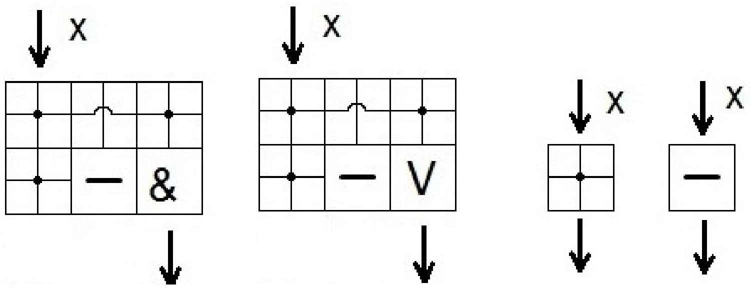

Рис. 2. Схемы, реализующие функции одной переменной

Введем функции «выбора»:

$$v_{2i}(x_1, x_2, ..., x_{2i}, y_0, y_1, ..., y_{2^{2i}-1}) = \bigvee_{\tilde{\sigma}} K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}) y_{|\tilde{\sigma}|},$$

где $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, ..., \sigma_{2i})$, $K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}) = x_1^{\sigma_1} ... x_{2i}^{\sigma_{2i}}$, $|\tilde{\sigma}| = \sum_{j=1}^{2i} \sigma_i 2^{2i-j}$ (т.е. $|\tilde{\sigma}|$ – число, двоичной записью которого является набор $\tilde{\sigma}$ длины $2i$). Всюду далее будем считать, что $\tilde{x} = (x_1, ..., x_{2i})$.

Поскольку $K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\alpha})$ обращается в нуль при $\tilde{\sigma} \ne \tilde{\alpha}$ и в единицу при $\tilde{\sigma} = \tilde{\alpha}$, то при подстановке $\alpha_1, ..., \alpha_{2i}$ вместо переменных $x_1, ..., x_{2i}$ в функцию выбора v_{2i} эта функция равна $y_{|\tilde{\alpha}|}$.

Лемма 3. Функцию выбора $v_2(x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, y_3)$ можно реализовать такой схемой выбора V_2, что $l(V_2)=6$, $h(V_2)=10$, $P(V_2) \le 8\varepsilon$.

Доказательство такое же, как в [9]. В качестве V_2 возьмем схему, изображенную на рис. 3. Эта схема реализует функцию выбора v_2, имеет длину $l(V_2)=6$ и высоту $h(V_2)=10$. Прямоугольниками выделены подсхемы, которые являются аналогами подсхем из [9].

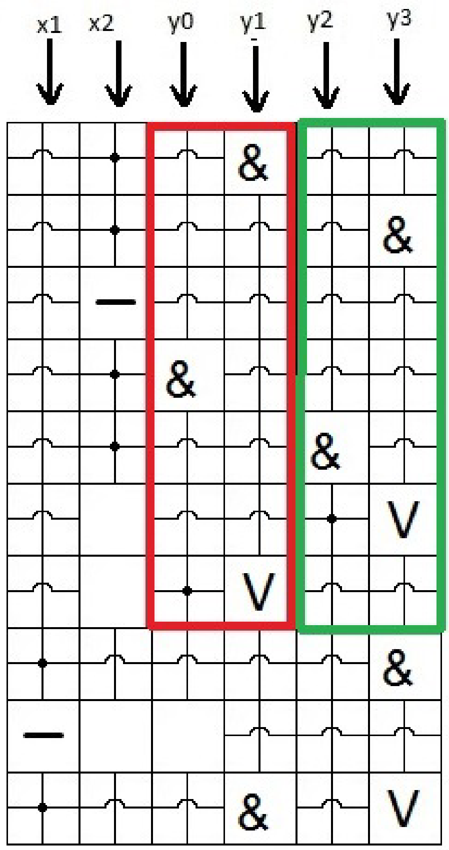

Рис. 3. Схема V_2

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – произвольная булева функция, а S – любая схема, ее реализующая. Для повышения надежности схемы S будем использовать схему $\psi(S)$, полученную из трех одинаковых схем S и схемы S_g, реализующей функцию голосования $g(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ (рис. 4). В работе [8] получены оценки ненадежности и сложности схемы $\psi(S)$, однако для простоты вычислений воспользуемся следующей леммой.

Лемма 4 [9]. $P(\psi(S)) \le 4\varepsilon + 3P^2(S)$.

Укажем по индукции способ построения схем выбора, обладающих более высокой надежностью и оценим их ненадежность и сложность. Пусть по определению схемы V_2, $\psi(V_2)$ – схемы, реализующие функцию выбора v_2, представленные в доказательстве леммы 1. Пусть построены схемы $V_{2\cdot 2}, \psi(V_{2\cdot 2}), \ldots, V_{2(i-1)}, \ldots, \psi(V_{2(i-1)})$. Тогда схема V_{2i} содержит в качестве подсхем одну схему $\psi(V_{2(i-1)})$, $2^{2(i-1)}$ схем V_2 и блок коммутационных элементов, соединяющий выходы схем V_2 с соответствующими входами схемы $\psi(V_{2(i-1)})$. Схематичное представление схемы V_{2i} показано на рис. 5.

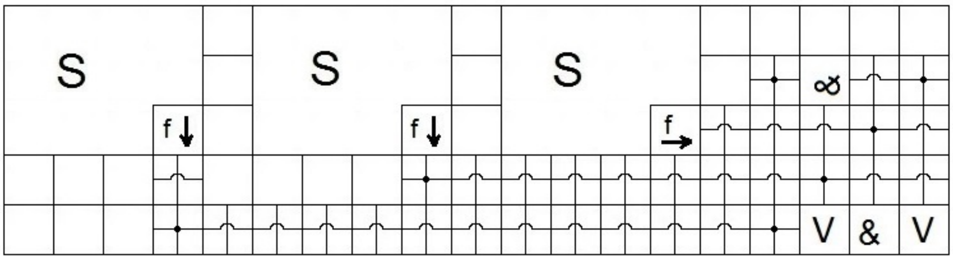

Рис. 4. Схема $\psi(S)$

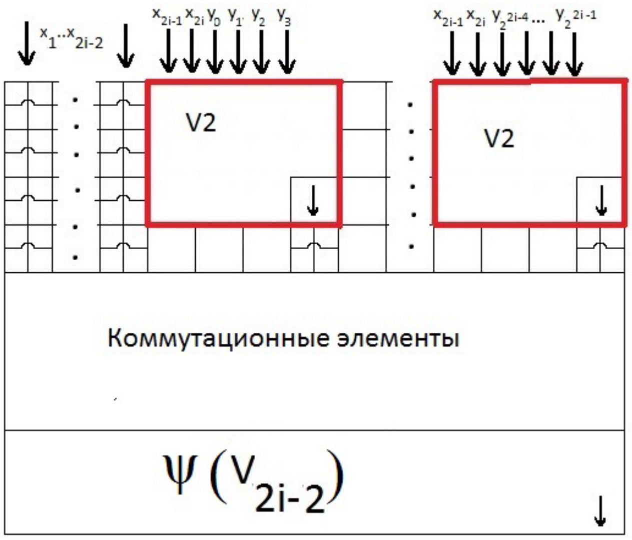

Рис. 5. Схема V_{2i}

Отметим особенности данного построения. Видно, что длина блока, расположенного в верхней части схемы и реализующего $2^{2(i-1)}$ схем V_2, будет больше длины «нижнего» блока, в котором находится схема $\psi(V_{2(i-1)})$. Это происходит потому, что с каждым шагом индукции количество схем V_2 (а значит, и длина «верхнего» блока) увеличивается в 4 раза, в то время как в «нижнем» блоке за счет применения операции ψ мы асимптотически лишь в трое увеличиваем длину схемы, построенной на предыдущем шаге. Это означает, что для того, чтобы схема V_{2i} имела прямоугольный вид, некоторые столбцы «нижнего» блока будут заполнены изоляторами или другими несущественными элементами, которые не меняют конфигурацию схемы. В схеме V_{2i} на входы нижнего блока необходимо подать $2^{2(i-1)}+2i-2$ различных сигналов, которые получены на «верхнем блоке». Для каждого из них в блоке коммутационных элементов выделим отдельную строку, в которой будем использовать коммутаторы (рис. 1,*г*,*д*). Коммутатор (рис. 1,*г*) используем в том столбце, в котором соответствующий сигнал приходит на блок коммутационных элементов «сверху», а также в тех столбцах, в которые нужно направить этот сигнал «вниз». Остальные элементы строки заполнены коммутаторами (рис. 1,*д*). В «нижнем» блоке напротив каждого сигнала, пришедшего «сверху», разместим столбец коммутаторов (рис. 1,*д*), которые не изменят функционирование нижнего блока, однако помогут избежать ситуации, когда в одном и том же столбце будут различны сигналы: пришедший «сверху» и подаваемый «вниз». Таких «фиктивных» столбцов в нижнем блоке нам потребуется не более, чем $2^{2(i-1)}+2i-2$ штук (количество входов схемы $\psi(V_{2i})$). Далее будет показано, что, вставив столько столбцов в нижнем блоке, мы не увеличим общую длину схемы V_{2i}. Пример схемы V_4, построенной указанным способом, представлен на рис. 6.

Рассмотрим теперь схему S, изображенную на рис. 5, содержащую в качестве подсхем схему выбора $\psi(V_{2i})$ и произвольные схемы $S_0, S_1, ..., S_{2^{2i}-1}$; в качестве переменных $y_0, y_1, ..., y_{2^{2i}-1}$, подаваемых на соответствующие входы схемы $\psi(V_{2i})$, в данном случае выступают функции, реализуемые на входах схем $S_0, S_1, ..., S_{2^{2i}-1}$.

Лемма 5. Для схемы S, изображенной на рис. 7 имеет место оценка

$$P(S) \le P(\psi(V_{2i}) + \max\left\{P(S_0), ..., P(S_{2^{2i}-1})\right\}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор $\sigma_1, ..., \sigma_{2i}$ значений переменных $x_1, ..., x_{2i}$, подаваемых на входы схемы S. Очевидно, что ошибка на выходе S возможна при неисправности схемы $\psi(V_{2i})$. Но допустим, что схема $\psi(V_{2i})$ исправна. В этом случае из определения функции выбора v_{2i} следует, что на выходе $\psi(V_{2i})$ (и всей схемы S) будет то же значение, что и на выходе схемы $S_{|\tilde{\sigma}|}$, $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, ..., \sigma_{2i})$; ошибка на выходе S при этом возможна только при наличии ошибки на выходе $S_{|\tilde{\sigma}|}$.

В итоге получается, что ошибка на выходе всей схемы S возможна только в том случае, когда наступает по крайней мере одно из событий:

1) имеет место ошибка на выходе $\psi(V_{2i})$;

2) имеет место ошибка на выходе схемы $S_{|\tilde{\sigma}|}$.

Значит, на рассматриваемом наборе $\tilde{\sigma}$ верно следующее неравенство:

$$P(S) \le P(V_{2i}) + P(S_{|\tilde{\sigma}|}).$$

Лемма 5 доказана.

Заметим, что утверждение леммы 5 остается в силе и в том случае, когда некоторые подсхемы из числа $S_0, ..., S_{2^{2i}-1}$ совпадают (или, другими словами, когда выходы одной и той же подсхемы $S_{|\tilde{\sigma}|}$ подаются на несколько выходов схемы $\psi(V_{2i})$. Оценим теперь сложность и ненадежность схемы выбора.

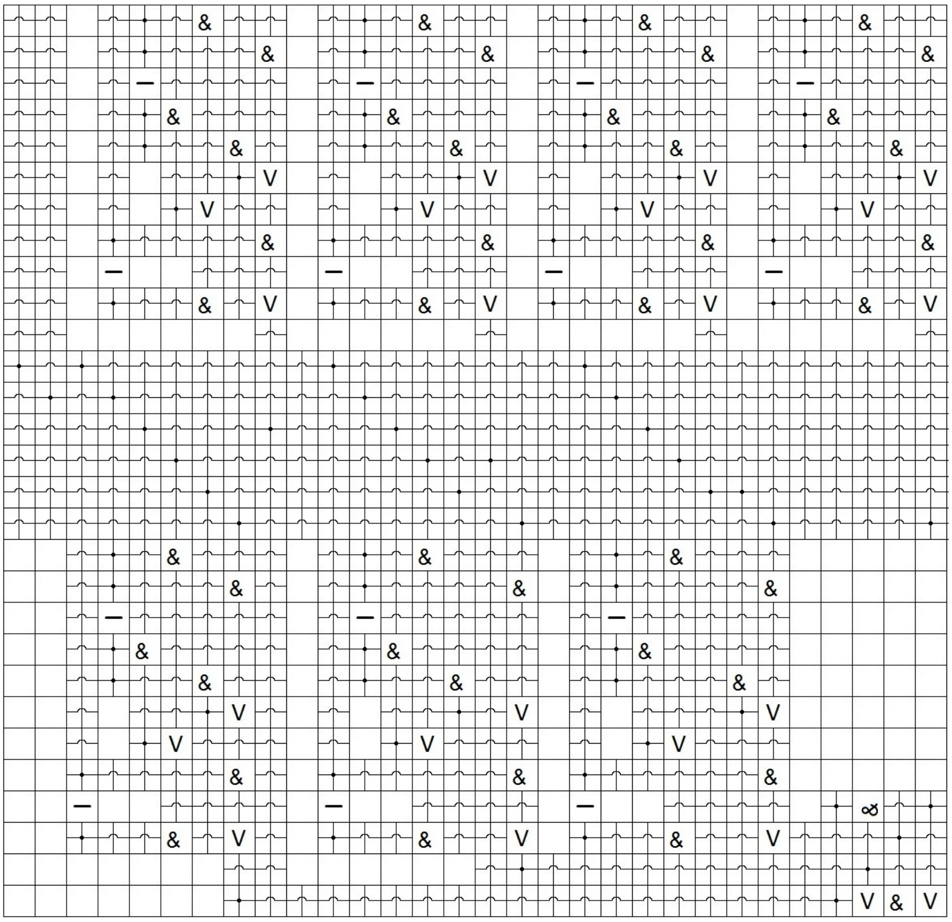

Рис. 6. Схема V_4

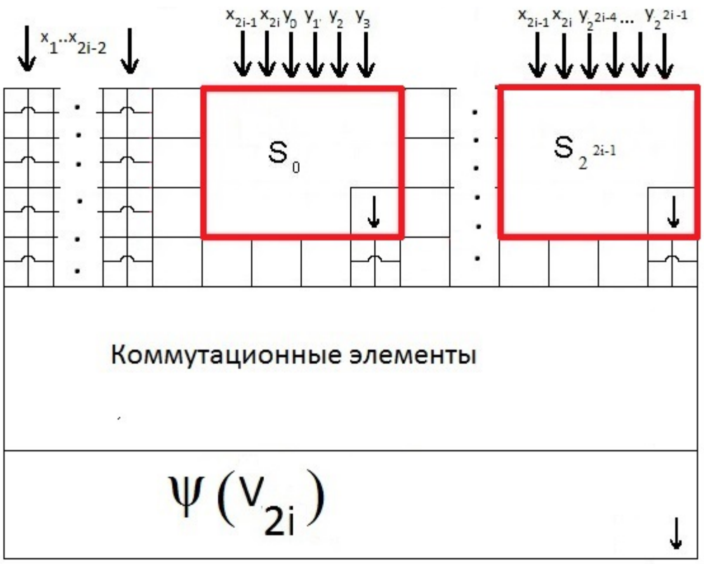

Рис. 7. Схема S

Лемма 6. 1) Если функцию выбора $v_{2(i-1)}$ можно реализовать схемой $V_{2(i-1)}$ высоты $h(V_{2(i-1)})$, то функцию выбора v_{2i} можно реализовать схемой V_{2i} высоты $h(V_{2i}) = h(V_{2(i-1)}) + 7 + 2i + 2^{2(i-1)}$.

2) Длина схемы V_{2i} равна $l(V_{2i}) = 7 \cdot 2^{2(i-1)} + 2i - 2$.

Доказательство. 1) Из построения схемы V_{2i} (рис. 5) видно, что ее высота складывается из высоты «верхнего» блока, равной высоте схемы V_2, плюс ряд изоляторов, высоты «нижнего» блока, равной $h(\psi(V_{2(i-1)})) = h(V_{2(i-1)}) + 2$ и высоты блока коммутационных элементов, в котором $2^{2(i-1)} + 2i - 2$ строк, выделенных под каждый из различных сигналов. Таким образом,

$$h(V_{2i}) = 7 + 2i + 2^{2(i-1)} - 2 + h(V_{2(i-1)}) + 2 = h(V_{2(i-1)}) + 7 + 2i + 2^{2(i-1)}.$$

2) Длина схемы V_{2i} определяется из построения. Отметим, что длина $l(\psi(V_{2(i-1)})$ нижнего блока, реализующего $\psi(V_{2(i-1)})$, оценивается как $l(\psi(V_{2(i-1)}) \lesssim 21 \cdot 2^{2(i-2)}$. Добавив к этой величине $2^{2(i-1)} + 2i - 2$ «фиктивных» столбцов, мы не превзойдем длины верхнего блока.

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. $l(\psi(V_{2i})) = 21 \cdot 2^{2(i-1)} + 6i - 2$, $h(\psi(V_{2i})) = \frac{1}{3}2^{2i} + 2i^2 + 13i - \frac{13}{3}$, $P(\psi(V_{2i})) \le 5\varepsilon$, $\varepsilon \in (0;1/1000]$.

Доказательство. Длина схемы видна непосредственно из построения (рис. 3), учитывая, как уже отмечалось, что «верхний» блок существенно длинее «нижнего» и длина всей схемы равна длине «верхнего» блока. Высота схемы получается из рекуррентного соотношения с использованием леммы 6.

Оценку для ненадежности схемы получим индукцией по i. При $i = 1$ имеем

$$P(\psi(V_2)) \le 4\varepsilon + 3P^2(V_2) \le 4\varepsilon + 192\varepsilon^2 \le 5\varepsilon \text{ (при } \varepsilon \le 1/1000\text{)}.$$

Предположим, что оценка справедлива для схем $\psi(V_2),...,\psi(V_{2(i-1)})$; докажем ее для схемы $\psi(V_{2i})$. При $\varepsilon \le 1/1000$ имеем

$$P(\psi(V_{2i}) \le 4\varepsilon + 3P^2(V_{2i}) \le 4\varepsilon + 3(P^2(\psi(V_{2(i-1)}) + P(V_2))^2 \le$$

$$\le 4\varepsilon + 3(25\varepsilon^2 + 8\varepsilon)^2 \le 4\varepsilon + 194\varepsilon^2 \le 5\varepsilon.$$

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Любую булеву функцию от k переменных можно реализовать схемой S такой, что $l(S) \lesssim 21 \cdot 2^{2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)}$, $h(S) \lesssim \frac{1}{3}2^{2\left[\frac{k}{2}\right]}$, $P(S) \le 7\varepsilon$.

Доказательство. Пусть задана произвольная булева функция $f(x_1,...,x_k)$. Разложим ее по первым $2i$ переменным:

$$f(x_1,...,x_k) = \underset{\sigma}{K} x_1^{\sigma_1}...x_{2i}^{\sigma_{2i}} y_{|\tilde{\sigma}|},$$

где $i = \left[\frac{k}{2}\right]$; $\tilde{\sigma} = (\sigma_1,...,\sigma_{2i})$, а $y_{|\tilde{\sigma}|} = \begin{cases} f(\sigma_1,...,\sigma_{2i}) \\ f(\sigma_1,...,\sigma_{2i},x_k) \end{cases}$ при четном и нечетном k соответственно.

В правой части указанного представления фигурирует функция выбора, которую можно реализовать клеточной схемой S, изображенной на рис. 7, если в качестве подсхем $S_0,...,S_{2^{2i}-1}$ взять подсхемы функций одной переменной. Используя оценку из леммы 7, получаем: $l(S) \lesssim 21\cdot 2^{2(i-1)}$, $h(S) \lesssim \frac{1}{3}2^{2i}$, а из лемм 7, 5, 2 получаем $P(S) \le 7\varepsilon$.

Лемма 8 доказана.

Теорема 1. Любую булеву функцию от n переменных можно реализовать такой клеточной схемой S, что $l(S) \lesssim \frac{21\cdot 2^n}{n}$, $h(S) \lesssim \frac{4}{3}\cdot\frac{2^n}{n}$, $P(S) \le 12\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0,1/1000]$.

Доказательство. Пусть задана произвольная булева функция $f(x_1,...,x_n)$. Положим $i =]n - \log(n - 3\log n)[/2$. Разложим булеву функцию f по первым $2i$ переменным:

$$f(x_1,...,x_n) = \underset{(\sigma_1,...,\sigma_{2i})}{K} x_1^{\sigma_1}...x_{2i}^{\sigma_{2i}} f(\sigma_1,...,\sigma_{2i},x_{2i+1},...,x_n).$$

Рассматривая выражение в правой части этого представления заданной функции опять же как функцию выбора, снова воспользуемся схемой S, изображенной на рис. 7. В качестве подсхем $S_0,...,S_{2^{2i}-1}$ возьмем в данном случае подсхемы, реализующие всевозможные функции от $(n-2i)$ переменных, присутствующие в представлении функции f; поскольку функций от $(n-2i)$ переменных $2^{2^{n-2i}}$ штук, то и рассматриваемых подсхем потребуется не более, чем $2^{2^{n-2i}}$ штук (выходы каждой из этих подсхем могут подаваться на несколько входов подсхемы $\psi(V_{2i})$. Воспользуемся оценками из лемм, представленных выше, и оценим длину и высоту схемы S. Оценим длину верхнего блока l_1 и нижнего блока l_2 по отдельности. Длина схемы S равна $\max(l_1,l_2)$:

$$l_1 \lesssim 2^{2^{n-2i}} \cdot 21 \cdot 2^{2\left(\left[\frac{n-2i}{2}\right]-1\right)} \lesssim \frac{21\cdot 2^n}{n^2},$$

$$l_2 \lesssim 21\cdot 2^{2(i-1)} \lesssim 21\cdot 2^{n-\log(n-3\log n)} \lesssim \frac{21\cdot 2^n}{n}.$$

Отметим, что при таком выборе параметра длина «нижнего блока» оказывается больше длины «верхнего блока» (в отличие от схемы, реализующей V_{2i}). Однако добавляя «фиктивные столбцы» к нижнему блоку длину схемы, мы по-прежнему существенно не увеличим, поскольку таких столбцов потребуется не более, чем $2^{2^{n-2i}}+2i-2 \lesssim \frac{2^n}{n^3}$ штук. Поэтому длина схемы $l(S) \lesssim \frac{21\cdot 2^n}{n}$.

Высота схемы S равна сумме высот верхнего блока, нижнего блока и блока коммутаторов:

$$h(S) \lesssim \frac{1}{3}\cdot 2^{\log(n-3\log(n))}+\frac{1}{3}\cdot 2^{\log(n-3\log(n)+2} \lesssim \frac{4}{3}\cdot\frac{2^n}{n}.$$

По лемме 5 при всех $\varepsilon \in (0{,}1/1000]$ верно неравенство

$$P(S) \le P(\psi(V_{2i})+\max(P(S_j)) \le 5\varepsilon+7\varepsilon \le 12\varepsilon.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Любую булеву функцию $f(x_1,x_2,...,x_n)$ можно реализовать такой клеточной схемой $\psi(S)$ такой, что $P(\psi(S)) \le 3\varepsilon+584\varepsilon^2$, $L(S) \lesssim \frac{84\cdot 4^n}{n^2}$ при всех $\varepsilon \in (0{,}1/1000]$.

Доказательство. К построенной в теореме 1 схеме применим операцию ψ и воспользуемся оценкой для $\psi(S)$ из работы [8]:

$$P(\psi(S)) = 3\varepsilon-5\varepsilon^2+2\varepsilon^3+13\varepsilon P(S)+3P^2(S).$$

Получим неравенство

$$P(\psi(S)) = 3\varepsilon-5\varepsilon^2+2\varepsilon^3+13\varepsilon P(S)+3P^2(S) \le 3\varepsilon+584\varepsilon^2.$$

Сложность схемы при применении операции ψ возрастает асимптотически в 3 раза. Теорема 2 доказана.

Выводы: с помощью предложенного метода были построены асимпотически оптимальные по надежности клеточные схемы. Сложность построенных схем существенно улучшена по сравнению с известным ранее результатом [8].

Список литературы

1. **Neuman, von J.** Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components / J. von Neuman // Automata studies / ed. by Shannon C., Mc. Carthy J. – Princeton University Press, 1956.
2. **Ортюков, С. И.** Об избыточности реализации булевых функций схемами из ненадежных элементов / С. И. Ортюков // Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 27–29 января 1987 г.). – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1989. С. 166–168.
3. **Uhlig, D.** Reliable networks from unreliable gates with almost minimal comlexity / D. Uhlig // Fundamentals of Computation Theory. Intern. conf. FCT'87 (Kazan, June 1987). Proc. – Berlin : Springer-Verl., 1987. – P. 462–469.

4. **Васин, А. В.** Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{x\,\&\,y, x \vee y, \bar{x}\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов / А. В. Васин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 4. – С. 2–16.
5. **Алехина, М. А.** О сложности надежных схем при инверсных неисправностях / М. А. Алехина, С. И. Аксенов // Дискретная математика и ее приложения : материалы IX Междунар. семинара, посвящ. 75-летию со дня рождения О. Б. Лупанова (Москва, 18–23 июня 2007 г.). – М. : Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, 2007. – С. 56–59.
6. **Кравцов, С. С.** О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов / С. С. Кравцов // Проблемы кибернетики. – Вып. 19. – М. : Наука, 1967. – С. 285–292.
7. **Улесова, А. Ю.** Сложность реализации булевых функций в некоторых моделях клеточных схем : дипломная работа / А. Ю. Улесова. – М. : МГУ им. Ломоносова, факультет ВМиК, кафедра математической кибернетики, 2010. – 25 с.
8. **Алехина, М. А.** Синтез и сложность асимптотически оптимальных по надежности клеточных схем / М. А. Алехина, А. В. Рыбаков // Известия высших учебных заведений. Физико-математические науки. – 2014. – № 4 (32). – С. 5–16.
9. **Редькин, Н. П.** Надежность и диагностика схем / Н. П. Редькин. – М. : Изд-во МГУ, 1992. – 192 с.

References

1. Neuman von J. *Automata studies* . Princeton University Press, 1956.
2. Ortyukov S. I. *Trudy seminara po diskretnoy matematike i ee prilozheniyam (Moskva, 27–29 yanvarya 1987 g.)* [Proceedings of the seminar on discrete mathematics and application thereof (Moscow, 27–29 January 1987)]. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 1989, pp. 166–168.
3. Uhlig D. *Fundamentals of Computation Theory. Intern. sonf. FCT'87 (Kazan, June 1987). Proc.* Berlin: Springer-Verl., 1987, pp. 462–469.
4. Vasin A. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2008, no. 4, pp. 2–16.
5. Alekhina M. A., Aksenov S. I. *Diskretnaya matematika i ee prilozheniya: materialy IX Mezhdunar. seminara, posvyashch. 75-letiyu so dnya rozhdeniya O. B. Lupanova (Moskva, 18–23 iyunya 2007 g.)* [Discrete mathematics and application thereof: proceedings of IX International seminar commemorating 75th jubilee of O. B. Lupanov (Moscow, 18–23 June 2007)]. Moscow: Izd-vo mekh.-mat. fak-ta MGU, 2007, pp. 56–59.
6. Kravtsov S. S. *Problemy kibernetiki* [Problems of cybernetics]. Issue 19. Moscow: Nauka, 1967, pp. 285–292.
7. Ulesova A. Yu. *Slozhnost' realizatsii bulevykh funktsiy v nekotorykh modelyakh kletochnykh skhem: diplomnaya rabota* [Complexity of Boolean functions realization in some models of cellular circuits: thesis work]. Moscow: MGU im. Lomonosova, fakul'tet VMiK, kafedra matematicheskoy kibernetiki, 2010, 25 p.
8. Alekhina M. A., Rybakov A. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2014, no. 4 (32), pp. 5–16.
9. Red'kin N. P. *Nadezhnost' i diagnostika skhem* [Reliability and diagnostics of circuits]. Moscow: Izd-vo MGU, 1992, 192 p.

Рыбаков Андрей Валентинович
аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Rybakov Andrey Valentinovich
Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: dm@pnzgu.ru

УДК 519.718
Рыбаков, А. В.
Метод синтеза надежных клеточных схем с использованием функции выбора / А. В. Рыбаков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 2 (34). – С. 122–134.